Réponses du devoir surveillé de Mathématiques n°2

Exercice 1

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}} = \left[\text{argsh}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \text{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \text{argsh}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\ \text{argsh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln 3$$

Exercice 2

1. Droite (BC) : $x+4y-1=0$.
   Droite (AC) : $3x+2y-13=0$.
   Droite (AB) : $x-y+4=0$.
2. (a) Hauteur issue de A : $4x-y+1=0$.
   Hauteur issue de B : $2x-3y+9=0$.
   Hauteur issue de C : $x+y-4=0$.
   (b) $H\left(\frac{3}{5};\frac{17}{5}\right)$.
3. (a) Médiatrice de $[BC]$: $4x-y-4=0$.
   Médiatrice de $[AC]$: $2x-3y=0$.
   Médiatrice de $[AB]$: $x+y-2=0$.
   (b) $\Omega\left(\frac{6}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Exercice 3

1. (a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1[$ et $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2(1-x^2)}} \leqslant 0$ pour $x\in[0;1[$ donc f est décroissante sur $[0;1]$ et comme $f(1)=0$ la fonction f est positive sur l'intervalle $[0;1]$.
   (b) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;1[$ et $g'(x)=\dfrac{(4-3x)\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2(1-x^2)}}$ or la fonction h définie par $h(x)=(4-3x)\sqrt{1+x}-\sqrt{2}$ est décroissante sur $[0;1[$ (étude du signe de la dérivée) et comme $h(1)=0$ la fonction h est positive sur l'intervalle $[0;1]$, on en déduit que g est croissante sur $[0;1]$ et comme $g(1)=0$ la fonction g est négative sur l'intervalle $[0;1]$.
2. On en déduit que pour $x\in[0;1]$: $\sqrt{2(1-x)} \leqslant \arccos x \leqslant (2-x)\sqrt{2(1-x)}$, d'où pour $x\in[0;1[$: $\sqrt{\dfrac{2}{1+x}} \leqslant \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant (2-x)\sqrt{\dfrac{2}{1+x}}$, et par passage à la limite : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}=1$.

Exercice 4

1. $\Omega_1(-1;0)$, $\Omega_2(0;2)$, $R_1=1$ et $R_2=2$.
2. $A(0;0)$ et $B\left(-\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$.
3. (a) $s_A : z'=-2iz$.
   (b) $s_B : z'=2i(z+2)$
4. (a) $\mathcal{I}m[(z_{s_A(M)}-z_B)\overline{(z-z_B)}]=-2i[z\overline{z}+2\ \mathcal{R}e(z)]=0$,
   $\mathcal{I}m[(z_{s_B(M)}-z_A)\overline{(z-z_A)}]=2i[z\overline{z}+2\ \mathcal{R}e(z)]=0$.
   (b) $s_A(M)\in(BM)\cap\mathcal{C}_2$ et $s_B(M)\in(AM)\cap\mathcal{C}_2$.